

40 研究函数的对称性、周期性

1. 【对称性】若函数满足下列性质,则函数具有什么性质?

- (1) $f(x) = f(-x)$
- (2) $f(x) = f(1-x)$
- (3) $f(x) = f(2-x)$
- (4) $f(1-x) = f(3+x)$
- (5) $f(x) + f(-x) = 0$
- (6) $f(x) + f(1-x) = 0$
- (7) $f(x) + f(2-x) = 2$
- (8) $f(1-x) + f(3+x) = 4$
- (9) $f(2x-1) = f(-2x+3)$
- (10) $f(2x-1) + f(-2x+3) = 2$

2. 【周期性】若函数满足下列性质,则函数具有什么性质?

- (1) $f(x) = f(x+2)$
- (2) $f(x) = -f(x+2)$
- (3) $f(x+2) = f(x+5)$
- (4) $f(x+2) = -f(x+5)$
- (5) $f(x+2) + f(x+5) = C$
- (6) $f(x+3) = \frac{1}{f(x)}$
- (7) $f(x+3) = -\frac{1}{f(x)}$
- (8) $f(x+4) = \frac{1-f(x)}{1+f(x)}$
- (9) $f(x) = f(x+3) + f(x-3)$

3. 【类周期】设 $f(x) = x, x \in [0, 1]$. 若 $f(x)$ 满足下列性质,分别画出函数在 $[2, 10]$ 上的图像:

- (1) $f(x+1) = f(x) + 2$
- (2) $f(x+1) = 3f(x)$
- (3) $f(2x) = 2f(x)$

4. 若 $f(x)$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, $f(1+x) = f(-x)$, 若 $f(-\frac{1}{3}) = \frac{1}{3}$, 求 $f(\frac{5}{3})$

5. 若 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $f(x+2)$ 为偶函数, $f(2x+1)$ 为奇函数, 求 $f(-1)$

6. 若定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(-x) = -f(x)$, $f(3-x) = f(x)$, 求 $f(2019)$

7. 已知函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的定义域均为 $\mathbf{R}$, 且满足 $f(x) + g(2-x) = 5$, $g(x) - f(x-4) = 7$.

若 $y = g(x)$ 的图像关于直线 $x = 2$ 对称, $g(2) = 4$, 求 $\sum_{k=1}^{22} f(k)$.