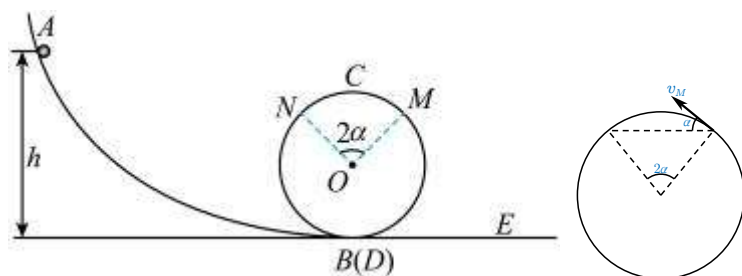


答疑记录

1. 如图所示的装置由弧形轨道 AB 、竖直圆轨道 $BMND$ 、水平直轨道 DE 平滑连接而成, 圆形轨道末端略错开, 分别与弧形轨道和水平直轨道连接, 装置固定在水平底座上。已知圆轨道半径 R , 弧形轨道和圆轨道均可视为光滑, 忽略空气阻力。质量为 m 的小球从弧形轨道离底座高 h 处由静止释放。若竖直圆轨道上部正中央有一段缺口 MN , M 、 N 等高, 该缺口所对的圆心角为 2α , α 为何值时, 小球完成沿 $BMND$ 路径运行所需的 h 最小, 并求出 h 的最小值。



【解析】从 A 到 M :

$$mg(h - R - R\cos\alpha) = \frac{1}{2}mv_M^2 - 0$$

从 M 到 N 是斜抛运动, 轨迹是抛物线。抛体运动用正交分解:

$$\begin{cases} v_M \cos\alpha \cdot t = 2R \sin\alpha \\ 2v_M \sin\alpha = gt \end{cases}$$

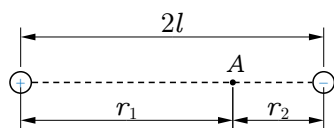
联立以上方程组得

$$h = \frac{R}{2\cos\alpha} + R\cos\alpha + R$$

$$\text{其中, } \frac{R}{2\cos\alpha} + R\cos\alpha \geq 2\sqrt{\frac{R}{2\cos\alpha} \cdot R\cos\alpha} = \sqrt{2}R$$

$$\text{"=" 成立} \Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \alpha = 45^\circ$$

2. 等量异种电荷的连线上, 何处电场强度 E 最小?



【解析】设两个电荷电量均为 Q

限制条件为 $r_1 + r_2 = 2l$

考察 A 处的场强:

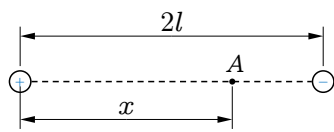
$$E = k\frac{Q}{r_1^2} + k\frac{Q}{r_2^2} = kQ\left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2}\right) = kQ\frac{r_1^2 + r_2^2}{r_1^2 r_2^2}$$

$$\text{分母 } r_1 r_2 \leq \left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)^2 = l^2, \text{ "=" 成立} \Leftrightarrow r_1 = r_2$$

$$\text{分子 } r_1^2 + r_2^2 \geq \frac{(r_1 + r_2)^2}{2} = 2l^2, \text{ "=" 成立} \Leftrightarrow r_1 = r_2$$

因此, $E = kQ \frac{r_1^2 + r_2^2}{r_1^2 r_2^2} \geq \frac{2kQ}{l^2}$

如果用函数方法求解,如下图所示,设 A 处的坐标为 x , 则



$$E(x) = kQ \left[\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(2l-x)^2} \right]$$

这个式子求导比较复杂。