

36 二次函数答疑题目

1. 解方程:

$$x^2 - 7|x| + 6 = 0$$

【答案】 $x^2 = |x|^2$

$$x^2 - 7|x| + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow |x|^2 - 7|x| + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow (|x| - 1)(|x| - 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow |x| = 1 \text{ 或 } |x| = 6$$

$$\Leftrightarrow x = \pm 1 \text{ 或 } \pm 6$$

2. 解方程:

$$abx^2 - (a^4 + b^4)x + a^3b^3 = 0$$

【答案】当 $a = 0$ 且 $b \neq 0$ 时,

$$-b^4x = 0$$

$$\Rightarrow x = 0$$

当 $a \neq 0$ 且 $b = 0$ 时,

$$-a^4x = 0$$

$$\Rightarrow x = 0$$

当 $a = 0$ 且 $b = 0$ 时, 恒成立

当 $ab \neq 0$ 时

$$(ax - b^3)(bx - a^3) = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{b^3}{3} \text{ 或 } x = \frac{a^3}{b}$$

3. 解方程:

$$x^2 - |2x - 1| - 4 = 0$$

【答案】按照绝对值分段.

$$\begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x^2 - 2x - 3 = 0 \end{cases}, \text{解得 } x = 3$$

或

$$\begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ x^2 + 2x - 5 = 0 \end{cases}, \text{解得 } x = -1 - \sqrt{6}$$

4. 当 $x = \frac{1 + \sqrt{2022}}{2}$ 时,

求 $(4x^3 - 2025x - 2022)^{2023}$ 的值

【答案】 $x = \frac{1 + \sqrt{2022}}{2}$

$$\Leftrightarrow 2x = 1 + \sqrt{2022}$$

$$\Leftrightarrow 2x - 1 = \sqrt{2022}$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 2022$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 = 2021 + 4x$$

$$\Leftrightarrow 4x^3 = 2021x + 4x^2$$

$$= 2021x + 2021 + 4x = 2025x + 2021$$

$$\text{则, } (4x^3 - 2025x - 2022)^{2023}$$

$$= (2025x + 2021 - 2025x - 2022)^{2023}$$

$$= (-1)^{2023} = -1$$

5. a 是 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 的根, 求代数式

$$\frac{2a^5 - 6a^4 + 2a^3 - a^2 - 1}{3a} \text{ 的值.}$$

【答案】 $a^2 - 3a + 1 = 0$

$$\Rightarrow a^2 = 3a - 1$$

$$\Rightarrow a^3 = a(a^2) = a(3a - 1) = 3a^2 - a$$

$$= 3(3a - 1) - a$$

$$= 8a - 3$$

$$\Rightarrow a^4 = a(a^3) = a(8a - 3) = 8a^2 - 3a$$

$$= 8(3a - 1) - 3a$$

$$= 21a - 8$$

$$\Rightarrow a^5 = a(a^4) = a(21a - 8) = 21a^2 - 8a$$

$$= 21(3a - 1) - 8a$$

$$= 55a - 21$$

$$\text{综上, } \frac{2a^5 - 6a^4 + 2a^3 - a^2 - 1}{3a} =$$

$$\frac{2(55a - 21) - 6(21a - 8) + 2(8a - 3) - (3a - 1) - 1}{3a}$$

$$= \frac{-3a}{3a} = -1$$

本质上就是用一次式表示二次式、三次式、...

6. 若 $\sqrt{p-2x} = -x$ 有两个不相等的实数根, 求 p 的取值范围.

【答案】 $\sqrt{p-2x} = -x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0$

$$p - 2x = x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - p = 0 \text{ 有两个不相等的实根 } x_1, x_2,$$

$$x_1 \leq 0 \text{ 且 } x_2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 4 + 4p > 0 \\ x_1 + x_2 \leq 0 \\ x_1 x_2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p > -1 \\ p \leq 0 \end{cases}$$

$$\therefore -1 < p \leq 0$$

7. 解方程:

$$\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + \sqrt{\frac{x}{x+2}} = \frac{10}{3}$$

【答案】 $\begin{cases} 1 + \frac{2}{x} \geq 0 \\ \frac{x}{x+2} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0 \text{ 或 } x < -2$

$$\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + \sqrt{\frac{x}{x+2}} = \frac{10}{3}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{x+2}{x}} + \sqrt{\frac{x}{x+2}} = \frac{10}{3}$$

注意到 $\sqrt{\frac{x+2}{x}}$ 与 $\sqrt{\frac{x}{x+2}}$ 互为倒数, 设

$$\sqrt{\frac{x+2}{x}} = t, \text{ 原方程化为}$$

$$t + \frac{1}{t} = \frac{10}{3} \Leftrightarrow 3t^2 - 10t + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (3t - 1)(t - 3) = 0$$

$$\text{解得 } \sqrt{\frac{x+2}{x}} = 3 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

$$\text{或 } \sqrt{\frac{x+2}{x}} = \frac{1}{3} \Rightarrow x = -\frac{9}{4}$$

综上,原方程的解为 $x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = -\frac{9}{4}$

8. 已知 a 是方程 $x^2 - x - 2022 = 0$ 的一个正根。

求代数式 $a - \frac{2022}{1 + \frac{2022}{a}}$ 的值。

【答案】 $a^2 - a - 2022 = 0$
 $\Leftrightarrow a^2 = a + 2022$
 $\Leftrightarrow a = 1 + \frac{2022}{a}$
 则原式 $= a - \frac{2022}{1 + \frac{2022}{a}} = a - \frac{2022}{a}$
 $= a - (a - 1) = 1$

9. 已知 $x^2 - 2021x + 1 = 0$ 的两根分别为 x_1, x_2 ,

求 $x_1^2 - \frac{2021}{x_2}$ 的值。

【答案】 $x_1^2 = 2021x_1 - 1$
 $\therefore x_1^2 - \frac{2021}{x_2}$
 $= 2021x_1 - 1 - \frac{2021}{x_2}$
 $= \frac{2021x_1x_2 - x_2 - 2021}{x_2}$
 由韦达定理得 $x_1x_2 = 1$,
 $\therefore$ 原式 $= \frac{-x_2}{x_2} = -1$

10. 设 $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, 则 $\frac{a^5 + a^4 - 2a^3 - a^2 - a + 2}{a^3 - 1} =$

【答案】需要知道 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 是方程 $x^2 + x - 1 = 0$ 的根。

那么, $a^2 = 1 - a$

由此, $a^3 = a \cdot a^2 = a(1 - a)$

$$= a - a^2 = a - (1 - a) = 2a - 1$$

$$a^4 = a \cdot a^3 = a(2a - 1) = 2a^2 - a$$

$$= 2(1 - a) - a = -3a + 2$$

$$a^5 = a \cdot a^4 = a(-3a + 2) = -3a^2 + 2a$$

$$= -3(1 - a) + 2a = 5a - 3$$

综上, $\frac{a^5 + a^4 - 2a^3 - a^2 - a + 2}{a^3 - 1}$

$$= \frac{5a - 3 - 3a + 2 - 2(2a - 1) - (1 - a) - a + 2}{2a - 1 - 1}$$

$$= \frac{-2a + 2}{2a - 2} = -1$$

11. 设 $m = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$,

则 $m^3 + 2m^2 - 1 + \frac{m^2}{m^2 + m + 1} =$

【答案】需要知道 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 是方程 $x^2 + x - 1 = 0$ 的根。

则 $m^2 = 1 - m$

$$m^3 = m(m^2) = m(1 - m) = m - m^2$$

$$= m - (1 - m) = 2m - 1$$

于是,

$$m^3 + 2m^2 - 1 + \frac{m^2}{m^2 + m + 1}$$

$$= 2m - 1 + 2(1 - m) - 1 + \frac{1 - m}{1 - m + m + 1}$$

$$= \frac{1 - m}{2} = \frac{3 - \sqrt{5}}{4}$$

12. 已知 a, b, c 是不全为 0 的三个实数, 那么关于 x 的方程 $x^2 + (a + b + c)x + (a^2 + b^2 + c^2) = 0$ 的根的情况是

【答案】 $\Delta = (a + b + c)^2 - 4(a^2 + b^2 + c^2)$
 $= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$
 $- 4a^2 - 4b^2 - 4c^2$
 $= -[a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2ac$
 $+ a^2 + (a^2 + b^2 + c^2)]$
 $= -[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 + (a^2 + b^2 + c^2)] \leq 0,$
 $\text{"=" 成立} \Leftrightarrow a = b = c = 0$
 $\therefore \Delta < 0$
 此方程无实数根。