

含参数的二次不等式

1. $x^2 - 3ax + 2a^2 < 0$

$\Leftrightarrow (x-a)(x-2a) < 0$

① 当 $a=2a$ 即 $a=0$ 时, $x^2 < 0$, 无解

② 当 $a < 2a$ 即 $a > 0$ 时, $a < x < 2a$

③ 当 $2a < a$ 即 $a < 0$ 时, $2a < x < a$

2. $x^2 - (a+1)x + a \leq 0$

$\Leftrightarrow (x-a)(x-1) \leq 0$

① 当 $a=1$ 时, $(x-1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x=1$

② 当 $a < 1$ 时, $a \leq x \leq 1$

③ 当 $a > 1$ 时, $1 \leq x \leq a$

3. $ax^2 - 2(a+1)x + 4 > 0$

① 当 $a=0$ 时, $-2x+4 > 0 \Leftrightarrow x < 2$

② 当 $a > 0$ 时, $(ax-2)(x-2) > 0$

1) 若 $\frac{2}{a} = 2$ 即 $a=1$, 则 $(x-2)^2 > 0 \Rightarrow x \neq 2$

2) 若 $\frac{2}{a} < 2$ 即 $a > 1$, 则 $x < \frac{2}{a}$, 或 $x > 2$

3) 若 $\frac{2}{a} > 2$ 即 $0 < a < 1$, 则 $x < 2$, 或 $x > \frac{2}{a}$

③ 当 $a < 0$ 时, $(ax-2)(x-2) > 0$

$\Leftrightarrow (ax+2)(x-2) < 0$

此时 $\frac{2}{a} < 2$ 恒成立, 无需分类讨论

$\therefore \frac{2}{a} < x < 2$

综上, $a < 0$ 时, $\frac{2}{a} < x < 2$;

$a=0$ 时, $x < 2$;

$0 < a < 1$ 时, $x < 2$, 或 $x > \frac{2}{a}$;

$a=1$ 时, $x \neq 2$;

$a > 1$ 时, $x < \frac{2}{a}$, 或 $x > 2$.

4. $a^3x^2 - (a^2+a)x + 1 > 0$

① 当 $a=0$ 时, $1 > 0$ 恒成立, $x \in \mathbb{R}$

② 当 $a > 0$ 时, $(a^2x-1)(ax-1) > 0$

$(a^2x-1)(ax-1)=0$ 的两根为 $x_1 = \frac{1}{a^2}$, $x_2 = \frac{1}{a}$

比较 $\frac{1}{a^2}$ 和 $\frac{1}{a}$, $\because \frac{1}{a^2} - \frac{1}{a} = \frac{1-a}{a^2}$

1) 当 $a=1$ 时, $\frac{1}{a^2} = \frac{1}{a} = 1$, $(x-1)^2 > 0$

$\Rightarrow x \neq 1$

2) 当 $a > 1$ 时, $\frac{1}{a^2} - \frac{1}{a} < 0 \Rightarrow \frac{1}{a^2} < \frac{1}{a}$

$\therefore x < \frac{1}{a^2}$ 或 $x > \frac{1}{a}$

3) 当 $0 < a < 1$ 时, $\frac{1}{a^2} - \frac{1}{a} > 0 \Rightarrow \frac{1}{a^2} > \frac{1}{a}$

$\therefore x < \frac{1}{a}$ 或 $x > \frac{1}{a^2}$

③ $a < 0$ 时, $(a^2x-1)(ax-1) > 0$

$\Leftrightarrow (a^2x-1)(-ax+1) < 0$

$(a^2x-1)(-ax+1)=0$ 的两根为 $x_1 = \frac{1}{a^2}$, $x_2 = \frac{1}{a}$

$\because a < 0$, 此时必有 $\frac{1}{a} < \frac{1}{a^2}$

$\therefore \frac{1}{a} < x < \frac{1}{a^2}$

综上: $a < 0$ 时, $\frac{1}{a} < x < \frac{1}{a^2}$;

$a=0$ 时, $x \in \mathbb{R}$

$0 < a < 1$ 时, $x < \frac{1}{a}$ 或 $x > \frac{1}{a^2}$

$a=1$ 时, $x \neq 1$

$a > 1$ 时, $x < \frac{1}{a^2}$ 或 $x > \frac{1}{a}$

$$5. \quad ax^2 + 2x + 1 > 0$$

$$\text{解: } ① a=0 \text{ 时, } 2x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$$

$$② a > 0 \text{ 时, } \Delta = 4 - 4a$$

$$1) \Delta = 4 - 4a < 0 \text{ 即 } a > 1 \text{ 时, } x \in \mathbb{R}$$

$$2) \Delta = 4 - 4a = 0 \text{ 即 } a = 1 \text{ 时, } (x+1)^2 > 0 \\ \Leftrightarrow x \neq -1$$

$$3) \Delta = 4 - 4a > 0 \text{ 即 } 0 < a < 1 \text{ 时,}$$

$$ax^2 + 2x + 1 = 0 \text{ 的两根为 } \frac{-2 - \sqrt{4-4a}}{2a}, \frac{-2 + \sqrt{4-4a}}{2a}$$

$$\text{即 } \frac{-1 - \sqrt{1-a}}{a}, \frac{-1 + \sqrt{1-a}}{a}$$

$$\text{易知 } \frac{-1 - \sqrt{1-a}}{a} < \frac{-1 + \sqrt{1-a}}{a}$$

$$\therefore x < \frac{-1 - \sqrt{1-a}}{a} \text{ 或 } x > \frac{-1 + \sqrt{1-a}}{a}$$

$$③ a < 0 \text{ 时, } ax^2 + 2x + 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow -(ax^2 + 2x + 1) < 0$$

$$\Delta \text{ 仍为 } 4 - 4a$$

$$\because a < 0, \therefore \text{此时 } 4 - 4a > 0 \text{ 恒成立}$$

$$-(ax^2 + 2x + 1) = 0 \text{ 的两根仍为}$$

$$\frac{-1 - \sqrt{1-a}}{a}, \frac{-1 + \sqrt{1-a}}{a}$$

$$\text{且必有 } \frac{-1 + \sqrt{1-a}}{a} < \frac{-1 - \sqrt{1-a}}{a}$$

$$\therefore \frac{-1 + \sqrt{1-a}}{a} < x < \frac{-1 - \sqrt{1-a}}{a}$$

$$\text{综上: } a < 0 \text{ 时, } \frac{-1 + \sqrt{1-a}}{a} < x < \frac{-1 - \sqrt{1-a}}{a}$$

$$a = 0 \text{ 时, } x > -\frac{1}{2}$$

$$0 < a < 1 \text{ 时, } x < \frac{-1 - \sqrt{1-a}}{a}, \text{ 或 } x > \frac{-1 + \sqrt{1-a}}{2}$$

$$a = 1 \text{ 时, } x \neq -1$$

$$a > 1 \text{ 时, } x \in \mathbb{R}$$

$$6. \quad ax^2 - (a+1)x + 1 < 0 \quad (a > 0)$$

$$\text{解: } (ax-1)(x-1) < 0$$

$$(ax-1)(x-1) = 0 \text{ 的两根为 } x_1 = \frac{1}{a}, x_2 = 1$$

$$\text{比较 } x_1 \text{ 和 } x_2, \frac{1}{a} - 1 = \frac{1-a}{a}$$

$$① \text{ 当 } a = 1 \text{ 时, } (x-1)^2 < 0 \text{ 无解.}$$

$$② \text{ 当 } a > 1 \text{ 时, } \frac{1}{a} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a} < 1$$

$$\frac{1}{a} < x < 1$$

$$③ \text{ 当 } 0 < a < 1 \text{ 时, } \frac{1}{a} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a} > 1$$

$$1 < x < \frac{1}{a}$$

$$\text{综上: } 0 < a < 1 \text{ 时, } 1 < x < \frac{1}{a}$$

$$a = 1 \text{ 时, 无解}$$

$$a > 1 \text{ 时, } \frac{1}{a} < x < 1$$

附: 5题的另一种解法.

5. $ax^2+2x+1>0$

解: 按 $\begin{cases} \text{二次项系数之正负} \\ \text{判别式值之正负} \end{cases}$ 为标准, 对

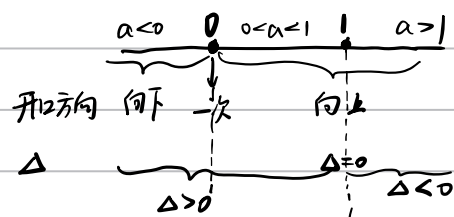
a 的分类讨论作顶层规划。

二次项正负由 a 决定, $\Rightarrow a$ 的某个临界值 0

$\Delta = 4 - 4a \Rightarrow a$ 的另一个临界值: 1

因此, 需分 $a < 0$, $a = 0$, $0 < a < 1$, $a = 1$, $a > 1$ 五类

列表如下:



方程 $ax^2+2x+1=0$ 的解为

$$\frac{-2 \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-a}}{a}$$

① $a < 0$ 时必有 $\Delta > 0$, 则 $\frac{-1+\sqrt{1-a}}{a} < x < \frac{-1-\sqrt{1-a}}{a}$

② $a = 0$ 时, $2x+1 > 0 \Rightarrow x > -\frac{1}{2}$

③ $0 < a < 1$ 时必有 $\Delta > 0$, 则 $x < \frac{-1-\sqrt{1-a}}{a}$ 或 $x > \frac{-1+\sqrt{1-a}}{a}$

④ $a = 1$ 时 $\Delta = 0$, 则 $(x+1)^2 > 0 \Rightarrow x \neq -1$

⑤ $a > 1$ 时, $\Delta < 0$, 则 $x \in \mathbb{R}$