基本不等式

1. 解：$a^2+4b^2-(-4ab)$

$=a^2+4b^2+4ab$

$=(a+2b)^2\geqslant 0$

$\therefore a^2+4b^2\geqslant -4ab$

2. 解：$a^2+3+\dfrac{4}{a^2+3}\geqslant 2\sqrt{(a^2+3)\cdot\dfrac{4}{a^2+3}}=4$

"="成立 $\Leftrightarrow a^2+3=\dfrac{4}{a^2+3}\Leftrightarrow a^2+3=\pm 2$ 无解

$\therefore a^2+3+\dfrac{4}{a^2+3}>4$

3. 解：$x(1-3x)$

$=\dfrac{1}{3}\cdot 3x(1-3x)\leqslant\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{(3x+1-3x)^2}{4}=\dfrac{1}{12}$

"="成立 $\Leftrightarrow 3x=1-3x\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{6}$

4. 解：$2a+3b\geqslant 2\sqrt{2a\cdot 3b}=2\sqrt{6}\sqrt{ab}$

$\Leftrightarrow\quad 1\geqslant 2\sqrt{6}\sqrt{ab}$

$\Leftrightarrow\quad 1\geqslant 24ab$

$\Leftrightarrow\quad ab\leqslant\dfrac{1}{24}$

"="成立 $\Leftrightarrow 2a=3b=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{1}{4}\\ b=\dfrac{1}{6}\end{cases}$

5. 解：$a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$

$\Leftrightarrow\quad 1\geqslant 2\sqrt{ab}$

$\Leftrightarrow\quad 1\geqslant 4ab$

$\Leftrightarrow\quad ab\leqslant\dfrac{1}{4}$

"="成立 $\Leftrightarrow a=b=\dfrac{1}{2}$

6. 解：法一："1"的代换

$\dfrac{4}{a}+\dfrac{5}{b}=\left(\dfrac{4}{a}+\dfrac{5}{b}\right)(a+b)=4+5+\dfrac{4b}{a}+\dfrac{5a}{b}$

$\geqslant 9+2\sqrt{\dfrac{4b}{a}\cdot\dfrac{5a}{b}}=9+4\sqrt{5}$

"="成立 $\Leftrightarrow\dfrac{4b}{a}=\dfrac{5a}{b}\Leftrightarrow\begin{cases}4b^2=5a^2\\ a+b=1\end{cases}$ 必有解

法二：权方和不等式

$\dfrac{4}{a}+\dfrac{5}{b}=\dfrac{2^2}{a}+\dfrac{(\sqrt{5})^2}{b}\geqslant\dfrac{(2+\sqrt{5})^2}{a+b}=9+4\sqrt{5}$

7. 解：$a+b\geqslant 2\sqrt{ab}=2\sqrt{81}=18$

"="成立 $\Leftrightarrow a=b=9$

8. 解：$x^2+y^2\geqslant 2xy$

$\Leftrightarrow\quad 1\geqslant 2xy$

$\Leftrightarrow\quad xy\leqslant\dfrac{1}{2}$

"="成立 $\Leftrightarrow x=y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}}\geqslant\dfrac{x+y}{2}$

$\Leftrightarrow\quad\dfrac{x^2+y^2}{2}\geqslant\dfrac{(x+y)^2}{4}$

$\Leftrightarrow\quad(x+y)^2\leqslant 2(x^2+y^2)=2$

$\Leftrightarrow\quad x+y\leqslant\sqrt{2}$

"="成立 $\Leftrightarrow x=y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

9. 解：$(a+b)^2\geqslant 4ab$

$\Leftrightarrow\quad ab\leqslant\dfrac{(a+b)^2}{4}=\dfrac{1}{4}$

"="成立 $\Leftrightarrow a=b=\dfrac{1}{2}$

10. 解: $a^2+b^2 \geq 2ab = 2$

"$=$"成立 $\Leftrightarrow$ $a=b=1$

11. 解: $\frac{4}{a}+\frac{9}{b} \geq 2\sqrt{\frac{36}{ab}}$

$\Leftrightarrow$ $1 \geq \frac{12}{\sqrt{ab}}$

$\Leftrightarrow$ $\sqrt{ab} \geq 12$

$\Leftrightarrow$ $ab \geq 144$

"$=$"成立 $\Leftrightarrow$ $\frac{4}{a}=\frac{9}{b}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} a=8 \\ b=18 \end{cases}$

$a+b = (a+b)(\frac{4}{a}+\frac{9}{b})$

$= 4+9+\frac{4b}{a}+\frac{9a}{b}$

$\geq 13 + 2\sqrt{\frac{4b}{a}\cdot\frac{9a}{b}} = 25$

"$=$"成立 $\Leftrightarrow$ $\frac{4b}{a}=\frac{9a}{b} \Leftrightarrow 9a^2=4b^2$

$\Leftrightarrow 3a=2b$ 必有解.

求 $a+b$ 的最小值还可用权方和不等式:

$1=\frac{4}{a}+\frac{9}{b}=\frac{2^2}{a}+\frac{3^2}{b} \geq \frac{(2+3)^2}{a+b}=\frac{25}{a+b}$

$\therefore$ $a+b \geq 25$

注解: 本题有个常见的错解如下:

"由于 $ab \geq 144$

$\therefore$ $a+b \geq 2\sqrt{ab} = 2\sqrt{144} = 24$ "

此解错在 ab 取最小值 144 的条件为 $\begin{cases} a=8 \\ b=18 \end{cases}$

而 $a+b$ 取最小值 24 的条件为 $a=b$

两次取等条件不一致, 等号无法传递.

12. $ab=a+b+3 \geq 2\sqrt{ab}+3$

令 $\sqrt{ab}=t$

$t^2-2t-3 \geq 0$

$(t-3)(t+1) \geq 0$

$t \geq 3$ 或 $t \leq -1$ (舍去)

$\therefore \sqrt{ab} \geq 3 \Rightarrow ab \geq 9$

"$=$"成立 $\Leftrightarrow$ $a=b=3$

此时 $a+b \geq 2\sqrt{ab} \geq 2\sqrt{9} = 6$

"$=$"成立 $\Leftrightarrow$ $a=b=3$

注意: 本题两次运用不等式, 取等条件相同

因此等号可以传递.

13. 解: $\frac{b}{a}+\frac{a}{b} \leq -2$

$\Leftrightarrow (-\frac{b}{a})+(-\frac{a}{b}) \geq 2$

$\because (-\frac{b}{a})+(-\frac{a}{b}) \geq 2\sqrt{(-\frac{b}{a})\cdot(-\frac{a}{b})} = 2$

因此原式成立

14. 解: $x+\frac{1}{x-1} = x-1+\frac{1}{x-1}+1$

$\geq 2\sqrt{(x-1)\cdot\frac{1}{x-1}}+1 = 3$

"$=$"成立 $\Leftrightarrow$ $x-1=\frac{1}{x-1} \Leftrightarrow x-1=1 \Leftrightarrow x=2$

15. 解: $3x+\frac{4}{x-1} = 3(x-1)+\frac{4}{x-1}+3$

$\geq 2\sqrt{12}+3 = 4\sqrt{3}+3$

"$=$"成立 $\Leftrightarrow$ $3(x-1)=\frac{4}{x-1} \Leftrightarrow x-1=\frac{4}{3}$

$\Leftrightarrow x=\frac{2\sqrt{3}}{3}+1$

16. 证明: $(a^2+b^2)(c^2+d^2)\geq(ac+bd)^2$

$\Leftrightarrow a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2\geq a^2c^2+b^2d^2+2abcd$

$\Leftrightarrow a^2d^2-2abcd+b^2c^2\geq 0$

$\Leftrightarrow (ad-bc)^2\geq 0$

"=" 成立 $\Leftrightarrow ad=bc \Leftrightarrow \frac{a}{c}=\frac{b}{d}$

17. 证明:

$(a^2+b^2+c^2)(d^2+e^2+f^2)\geq(ad+be+cf)^2$

$\Leftrightarrow a^2d^2+a^2e^2+a^2f^2+b^2d^2+b^2e^2+b^2f^2+c^2d^2+c^2e^2+c^2f^2$

$\geq a^2d^2+b^2e^2+c^2f^2+2abed+2acdf+2bcef$

$\Leftrightarrow a^2e^2+a^2f^2+b^2d^2+b^2f^2+c^2d^2+c^2e^2$

$\geq 2abed+2acdf+2bcef$

$\Leftrightarrow (ae-bd)^2+(af-cd)^2+(bf-ce)^2\geq 0$

"=" 成立 $\Leftrightarrow \begin{cases}ae=bd\\ af=cd\\ bf=ce\end{cases} \Leftrightarrow \frac{a}{d}=\frac{c}{f}=\frac{b}{e}$

18. 解: $(a+2b+3c)(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c})\geq(\sqrt{1}+\sqrt{4}+\sqrt{9})^2$

$=(1+2+3)^2$

$=36$

$\therefore\ 2(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c})\geq 36$

$\Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}\geq 18$

"=" 成立 $\Leftrightarrow a^2=b^2=c^2 \Leftrightarrow \begin{cases}a=b=c\\ a+2b+3c=2\end{cases}$

$\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}$

19. 解: $y=3\sqrt{x-5}+4\sqrt{9-x}$

$\leq\sqrt{(3^2+4^2)(x-5+9-x)}$

$=\sqrt{25\times 4}=10$

"=" 成立 $\Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{x-5}}=\frac{4}{\sqrt{9-x}}$

$\Leftrightarrow \frac{9}{x-5}=\frac{16}{9-x}$

$\Leftrightarrow 16x-80=81-9x$

$\Leftrightarrow 25x=161$

$\Leftrightarrow x=\frac{161}{25}$

20. 解: $y=2\sqrt{x-2}+3\sqrt{5-x}$

$\leq\sqrt{(2^2+3^2)(x-2+5-x)}$

$=\sqrt{13\times 3}=\sqrt{39}$

"=" 成立 $\Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{x-2}}=\frac{3}{\sqrt{5-x}}$

$\Leftrightarrow \frac{4}{x-2}=\frac{9}{5-x}$

$\Leftrightarrow 9x-18=20-4x$

$\Leftrightarrow 13x=38 \Leftrightarrow x=\frac{38}{13}$

21. $y=\sqrt{x+7}+4\sqrt{2-2x}$

$=\sqrt{x+7}+4\sqrt{2}\sqrt{1-x}$

$\leq\sqrt{(1^2+(4\sqrt{2})^2)(x+7+1-x)}$

$=\sqrt{(1+32)\times 8}$

$=2\sqrt{66}$

"=" 成立 $\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x+7}}=\frac{4}{\sqrt{2-2x}}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x+7}=\frac{16}{2-2x}=\frac{8}{1-x}$

$\Leftrightarrow 8x+56=1-x$

$\Leftrightarrow 9x=-55 \Rightarrow x=-\frac{55}{9}$

22. 证明:

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\geqslant\frac{(a+b)^2}{x+y}$$

$$\Leftrightarrow (x+y)\left(\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\right)\geqslant(a+b)^2$$

$$\sqrt{x\cdot\frac{a^2}{x}}\qquad\sqrt{y\cdot\frac{b^2}{y}}$$

"="成立 $\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{\frac{a}{\sqrt{x}}}=\frac{\sqrt{y}}{\frac{b}{\sqrt{y}}}\Leftrightarrow\frac{x}{a}=\frac{y}{b}\Leftrightarrow\frac{a}{x}=\frac{b}{y}$

23. (1) $\frac{1}{a}+\frac{4}{b}=\frac{1^2}{a}+\frac{2^2}{b}\geqslant\frac{(1+2)^2}{a+b}=\frac{9}{a+b}$

"="成立 $\Leftrightarrow \frac{1}{a}=\frac{2}{b}\Leftrightarrow 2a=b$

(2) $\frac{1}{a-1}+\frac{9}{b+1}=\frac{1^2}{a-1}+\frac{3^2}{b+1}\geqslant\frac{(1+3)^2}{a-1+b+1}$

$$=\frac{16}{a+b}$$

"="成立 $\Leftrightarrow \frac{1}{a-1}=\frac{3}{b+1}\Leftrightarrow 3a-3=b+1$

$\Leftrightarrow 3a-b=4$