

## 20 基本不等式

1. 比较大小:  $a^2 + 4b^2$  和  $-4ab$
2. 比较大小:  $a^2 + 3 + \frac{4}{a^2 + 3}$  和 4
3. 若  $x > 0$ , 求  $x(1 - 3x)$  的最大值。
4. 若  $a > 0, b > 0$  且  $2a + 3b = 1$ , 求  $ab$  的最大值。
5. 若  $a > 0, b > 0$  且  $a + b = 1$ , 求  $ab$  的最大值。
6. 若  $a > 0, b > 0$  且  $a + b = 1$ , 求  $\frac{4}{a} + \frac{5}{b}$  的最小值。
7. 若  $a > 0, b > 0$  且  $ab = 81$ , 求  $a + b$  的最小值。
8. 若  $x > 0, y > 0$  且  $x^2 + y^2 = 1$ , 求  $xy$  的最大值和  $x + y$  的最大值。
9. 若实数  $a, b$  满足  $a + b = 1$ , 求  $ab$  的最大值。
10. 若实数  $a, b$  满足  $ab = 1$ , 求  $a^2 + b^2$  的最小值。
11. 若  $a > 0, b > 0$  且  $\frac{4}{a} + \frac{9}{b} = 1$ , 求  $ab$  的最小值和  $a + b$  的最小值。
12. 若  $a > 0, b > 0, ab = a + b + 3$ , 求  $ab$  的最小值和  $a + b$  的最小值。
13. 若  $ab < 0$ , 求证:  $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \leq -2$
14. 若  $x > 1$ , 求  $x + \frac{1}{x-1}$  的最小值。
15. 若  $x > 1$ , 求  $3x + \frac{4}{x-1}$  的最小值。
16. 求证二维柯西不等式:  
 $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2$   
当且仅当  $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$  时等号成立
17. 求证三维柯西不等式:  
 $(a^2 + b^2 + c^2)(d^2 + e^2 + f^2) \geq (ad + be + cf)^2$   
当且仅当  $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$  时等号成立
18. 设  $a, b, c$  均为正数, 且  $a + 2b + 3c = 2$ ,  
求  $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c}$  的最小值。

19. 求  $y = 3\sqrt{x-5} + 4\sqrt{9-x}$  的最大值

20. 求  $y = 2\sqrt{x-2} + 3\sqrt{5-x}$  的最大值

21. 求  $y = \sqrt{x+7} + 4\sqrt{2-2x}$  的最大值

22. 根据柯西不等式, 证明权方和不等式:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}$$

以此类推,

$$\frac{a^3}{x^2} + \frac{b^3}{y^2} \geq \frac{(a+b)^3}{(x+y)^2} \dots$$

23. 仿照下面示例, 用权方和不等式改写:

$$\frac{4}{a} + \frac{5}{b} = \frac{2^2}{a} + \frac{(\sqrt{5})^2}{b} \geq \frac{(2+\sqrt{5})^2}{a+b}$$

$$(1) \frac{1}{a} + \frac{4}{b}$$

$$(2) \frac{1}{a-1} + \frac{9}{b+1}$$