39　函数图像变换理论

知识讲解

1. 我们只研究三种变换——平移、伸缩、对称。每种变换又可以在水平、竖直两个方向进行。

2. 这三种变换都是“线性”的，就是说，所有的变换都是把 x 换成 x 的一次式，即 $ax+b$ 的形式。类似地，把 y 换成 $ay+b$ 的形式。

3. 本节要掌握的重点，是每一种线性变换对应的图像变换。例如：$x\to x+2$

   它对应的图像变换是：向左平移 2 个单位长度。（为了叙述简洁，下文简称为“左 2”）。

   具体地，在 $y=x^2$ 的表达式中，把 x 换成 $x+2$，得到 $y=(x+2)^2$，问 $y=(x+2)^2$ 的图像和 $y=x^2$ 的图像是什么关系？答案：$y=x^2$ 的图像左 2 就得到 $y=(x+2)^2$ 的图像。可以用下面的式子来表示这个过程。箭头上方的 $x\to x+2$ 表示所作的代换，箭头下方的“左 2”表示变换的效果。

$$y=x^2\xrightarrow[\text{左}2]{x\to x+2}y=(x+2)^2$$

4. 下面详细列举了所有的变换，请大家用心学习记忆。

$$y=x^2\xrightarrow[\text{右}2]{x\to x-2}y=(x-2)^2$$

$$y=x^2\xrightarrow[\text{下}2]{y\to y+2}y+2=x^2\text{ 即 }y=x^2-2$$

$$y=x^2\xrightarrow[\text{上}2]{y\to y-2}y-2=x^2\text{ 即 }y=x^2+2$$

$$y=x^2\xrightarrow[\text{水平变}\frac{1}{2}]{x\to 2x}y=(2x)^2\text{ 即 }y=4x^2$$

$$y=x^2\xrightarrow[\text{水平变}2(\text{倍})]{x\to\frac{1}{2}x}y=(\frac{1}{2}x)^2\text{ 即 }y=\frac{1}{4}x^2$$

$$y=x^2\xrightarrow[\text{竖直变}\frac{1}{2}]{y\to 2y}2y=x^2\text{ 即 }y=\frac{1}{2}x^2$$

$$y=x^2\xrightarrow[\text{竖直变}2(\text{倍})]{y\to\frac{1}{2}y}\frac{1}{2}y=x^2\text{ 即 }y=x^2$$

$$y=x^2\xrightarrow[\text{关于}y\text{轴对称}]{x\to -x}y=(-x)^2\text{ 即 }y=x^2$$

$$y=x^2\xrightarrow[\text{关于}x\text{轴对称}]{y\to -y}-y=x^2\text{ 即 }y=-x^2$$

5. 一般的线性变换是上述基本变换的复合，例如 $x\to 2x+3$。复合变换可以分两步进行，有两种不同的理解：

$$(1)\ x\to x+3\xrightarrow{x\to 2x}2x+3$$

   第一步是 $x\to x+3$，效果是左 3；

   第二步是 $x\to 2x$，效果是水平变 $\frac{1}{2}$.

$$(2)\ x\to 2x\xrightarrow{x\to x+\frac{3}{2}}2x+3$$

   第一步是 $x\to 2x$，效果是水平变 $\frac{1}{2}$。

   第二步，是 $2x$ 整体变成了 $2x+3$，而不是 x 变成了 $x+3$。我们必须推导出 x 变成了什么，才能得到正确的结论。再次强调，**所有的变换都必须在 x 或 y 上进行操作**。

6. 我们看到，采取第一种理解，变换过程比较简单。所以今后遇到一般的线性变换，我们最好“先平移，后伸缩”。那么，采取上述第二种理解时，我们是怎么由 $2x\to 2x+3$ 得到 $x\to x+\frac{3}{2}$ 的呢？一般的做法是，设 $2(x+p)=2x+3$，由此反解出 $p=\frac{3}{2}$。

7. 让我们升级问题难度，比如：$4x+2\to 5x-1$，这个式子对应的基本变换是什么？

   解决这个问题，可以用待定系数法。因为我们明确了对 x 所作的变换是线性的，所以可以设 $x\to ax+b$，则

$$4x+2\to 4(ax+b)+2\to 4ax+4b+2$$

   由 $4ax+4b+2\equiv 5x-1$ 得

$$\begin{cases}4a=5\\4b+2=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{5}{4}\\b=-\frac{3}{4}\end{cases}$$

8. 从上面的推导过程中不难看出，像 $4x+2\to 5x-1$ 这种线性代换式，也可以对其施加类似等式变形的技巧，请看过程：

$$4x+2\to 5x-1$$

$$x+\frac{2}{4}\to\frac{5}{4}x-\frac{1}{4}\text{（两边同时除以 4）}$$

$$x\to\frac{5}{4}x-\frac{3}{4}\text{（常数项移到右边）}$$

   但要注意，我们变形的目的是让替换式的左边化为 x，所以不要对 x 进行移项操作，不要误以为是解方程。

9. 注意：这里用换元法很容易出错。

   例如：令 $4x+2=t$，得到 $x=\frac{t-2}{4}$，代入 $5x-1$ 得 $\frac{5}{4}t-\frac{7}{2}$。

   这样，原来的变换就化为 $t\to\frac{5}{4}t-\frac{7}{2}$。

   有人认为变量可以用任何字母表示，于是把 t 换回 x，得到 $x\to\frac{5}{4}x-\frac{7}{2}$，这是错误的。错就错在：这里 t 是不能和 x 替换的。$t=4x+2$ 这一步已经是个线性变换了（并且这个变换并非指向自身），所以对 t 进行的变换，还得再复合 $4x+2\to t$ 这个内层变换，才能得到对 x 进行的变换。